Revisión de conceptos

1. Si f es continua en c, $f'(x) > 0$ cerca de c a su lado izquierdo, y $f'(x) < 0$ cerca de c a su lado derecho, entonces $f(c)$ es un valor ________ local para f.

2. Si $f'(x) = (x+2)(x-1)$, entonces $f(-2)$ es un valor ________ local para f, y $f(1)$ es un valor ________ local para f.

3. Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, esperamos encontrar un valor ________ local para f en c.

4. Si $f(x) = x^3$, entonces $f(0)$ no es ________ ni ________, aunque $f''(0) =$ ________.

Conjunto de problemas 3.3

En los problemas del 1 al 10 identifique los puntos críticos. Después utilice (a) la prueba de la primera derivada y (si es posible) (b) la prueba de la segunda derivada para decidir cuáles de los puntos críticos dan un máximo local y cuáles dan un mínimo local.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4$

2. $f(x) = x^3 - 12x + \pi$

3. $f(\theta) = \operatorname{sen} 2\theta, 0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$

4. $f(x) = \frac{1}{2}x + \operatorname{sen} x, 0 < x < 2\pi$

5. $\Psi(\theta) = \operatorname{sen}^2 \theta, -\pi/2 < \theta < \pi/2$

6. $r(z) = z^4 + 4$

7. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

8. $g(z) = \dfrac{z^2}{1 + z^2}$

9. $h(y) = y^2 - \dfrac{1}{y}$

10. $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x^2 + 1}$

En los problemas del 11 al 20 encuentre los puntos críticos y utilice la prueba que elija para decidir cuáles puntos críticos dan un valor máximo local y cuáles dan un valor mínimo local. ¿Cuáles son estos valores máximos y mínimos locales?

11. $f(x) = x^3 - 3x$

12. $g(x) = x^4 + x^2 + 3$

13. $H(x) = x^4 - 2x^3$

14. $f(x) = (x - 2)^5$

15. $g(t) = \pi - (t - 2)^{2/3}$

16. $r(s) = 3s + s^{2/5}$

17. $f(t) = t - \dfrac{1}{t}, t \neq 0$

18. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + 4}}$

19. $\Lambda(\theta) = \dfrac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}, 0 < \theta < 2\pi$

20. $g(\theta) = |\operatorname{sen}\theta|, 0 < \theta < 2\pi$

En los problemas del 21 al 30 determine, si es posible, los valores máximo y mínimo (globales) de la función dada en el intervalo que se indica.

21. $f(x) = \operatorname{sen}^2 2x$ en $[0, 2]$

22. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 4}$ en $[0, \infty)$

23. $g(x) = \dfrac{x^2}{x^3 + 32}$ en $[0, \infty)$

24. $h(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4}$ en $[0, \infty)$

25. $F(x) = 6\sqrt{x} - 4x$ en $[0, 4]$

26. $F(x) = 6\sqrt{x} - 4x$ en $[0, \infty)$

27. $f(x) = \dfrac{64}{\operatorname{sen} x} + \dfrac{27}{\cos x}$ en $(0, \pi/2)$

28. $g(x) = x^2 + \dfrac{16x^2}{(8 - x)^2}$ en $(8, \infty)$

29. $H(x) = |x^2 - 1|$ en $[-2, 2]$

30. $h(t) = \operatorname{sen} t^2$ en $[0, \pi]$

En los problemas del 31 al 36 se da la primera derivada, f'. Encuentre todos los valores de x que hacen que la función f (a) tenga un mínimo local y (b) un máximo local.

31. $f'(x) = x^3(1 - x)^2$

32. $f'(x) = -(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$

33. $f'(x) = (x - 1)^2(x - 2)^2(x - 3)(x - 4)$

34. $f'(x) = (x - 1)^2(x - 2)^2(x - 3)^2(x - 4)^2$

35. $f'(x) = (x - A)^2(x - B)^2, A \neq B$

36. $f'(x) = x(x - A)(x - B), 0 < A < B$

En los problemas del 37 al 42 bosqueje una gráfica de una función con las propiedades dadas. Si es imposible graficar tal función, entonces indique esto y justifique su respuesta.

37. f es diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$ y dos máximos locales y dos mínimos locales en $(0, 6)$.

38. f es diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$, así como tres máximos locales y dos mínimos locales en $(0, 6)$.

39. f es continua, pero no es necesariamente diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$ y un mínimo local y un máximo local en $(0, 6)$.

40. f es continua, pero no es necesariamente diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$, así como un mínimo local, y no tiene máximo local en $(0, 6)$.

41. f tiene dominio $[0, 6]$, pero no es necesariamente continua; tiene tres máximos locales y carece de mínimo local en $(0, 6)$.

42. f tiene dominio $[0, 6]$, pero no es necesariamente continua; tiene dos máximos locales y no tiene mínimo local en $(0, 6)$.

43. Considere $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, con $A > 0$. Demuestre que $f(x) \geq 0$ para toda x si y sólo si $B^2 - 4AC \leq 0$.

44. Considere $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, con $A > 0$. Demuestre que f tiene un máximo local y un mínimo local si y sólo si $B^2 - 3AC > 0$.

45. ¿Qué conclusiones puede sacar respecto a f, con base en la información de que $f'(c) = f''(c) = 0$ y $f'''(c) > 0$?

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** máximo **2.** máximo; mínimo **3.** máximo **4.** máximo local; mínimo local; 0.